Clase 2: Distribuciones y Derivadas Generalizadas.

Peter Hummelgens

9 de enero de 2007

1. Distribuciones.

Nuestro espacio vectorial básico será $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R})$, el espacio de las funciones de prueba. Una distribución en $\mathbb{R}$ es por definición un funcional lineal $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ (Observación: más precisamente se requiere que se defina en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ una noción de convergencia de succesiones y que T sea continua con respecto a esta convergencia; sin embargo esta condición de continuidad se cumple "en la práctica", y cómo este no es un curso para matemáticos obviamos la condición de continuidad.)

En la clase 1 vimos dos ejemplos fundamentales de distribuciones:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ (a \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

y (simplificando la notación escribiendo f en lugar de T_f)

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ (f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})). \tag{2}$$

Distribuciones de la forma (2), es decir producidas por una función localmente integrable, las llamamos distribuciones regulares. Una distribución no regular se llama distribución singular. Las distribuciones δ_a son distribuciones singulares (existen otros tipos de distribuciones singulares que están fuera del alcance de este curso).

Sea $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ el conjunto de las distribuciones en $\mathbb{R}$. Vamos a convertir $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en un espacio vectorial introduciendo la suma $S+T$ de dos distribuciones $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y la multiplicación λT por un número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$. Definimos

$$\begin{aligned} \langle S+T, \varphi \rangle &:= \langle S, \varphi \rangle + \langle T, \varphi \rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ \langle \lambda T, \varphi \rangle &:= \lambda \langle T, \varphi \rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{3}$$

Es claro que $S+T, \lambda T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$. Verifiquemos que $S+T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, es decir que $S+T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal. Tenemos para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle S+T, \varphi+\psi\rangle &\overset{(3)}{=} \langle S, \varphi+\psi\rangle + \langle T, \varphi+\psi\rangle \\ &= \langle S, \varphi\rangle + \langle S, \psi\rangle + \langle T, \varphi\rangle + \langle T, \psi\rangle \\ &\overset{(3)}{=} \langle S+T, \varphi\rangle + \langle S+T, \psi\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle S+T, \mu\varphi\rangle &\overset{(3)}{=} \langle S, \mu\varphi\rangle + \langle T, \mu\varphi\rangle \\ &= \mu\langle S, \varphi\rangle + \mu\langle T, \varphi\rangle \\ &= \mu\left[\langle S, \varphi\rangle + \langle T, \varphi\rangle\right] \\ &\overset{(3)}{=} \mu\langle S+T, \varphi\rangle, \end{aligned}$$

y así verificamos que $S+T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Dejamos al lector verificar que $\lambda T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ahora $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ <u>es un espacio vectorial</u> y podemos aplicar las reglas algebraicas usuales de un espacio vectorial.

Podemos también definir la multiplicación ϕT de una $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ con una función $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (no necesariamente de soporte compacto.) Definimos

$$\langle \phi T, \varphi\rangle := \langle T, \phi\varphi\rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{4}$$

El corchete $\langle T, \phi\varphi\rangle$ está bien definido ya que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) \Longrightarrow \phi\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (¡verifique!). Es claro que $\phi T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$. Además para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \langle \phi T, \varphi+\psi\rangle &\overset{(4)}{=} \langle T, \phi(\varphi+\psi)\rangle \\ &= \langle T, \phi\varphi + \phi\psi\rangle \\ &= \langle T, \phi\varphi\rangle + \langle T, \phi\psi\rangle \\ &\overset{(4)}{=} \langle \phi T, \varphi\rangle + \langle \phi T, \psi\rangle, \end{aligned}$$

y

$$\langle \phi T, \lambda\varphi\rangle \overset{(4)}{=} \langle T, \lambda\phi\varphi\rangle = \lambda\langle T, \phi\varphi\rangle \overset{(4)}{=} \lambda\langle \phi T, \varphi\rangle,$$

$\Longrightarrow \phi T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ es funcional lineal, es decir, $\phi T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ejemplos concretos presentaremos más adelante.

2. Derivadas generalizadas (o distribucionales).

Sea $f \in C^1(\mathbb{R})$ una función dada. Como $f' \in C(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$, f' define la distribución regular

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{\infty}^{-\infty} f'(x)\varphi(x)dx, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{5}$$

Aplicando integración por partes en la integral tenemos

$$\langle f', \varphi \rangle = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\infty}^{-\infty} f(x)\varphi'(x)dx,$$

pero $[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} = 0$ porque φ es de soporte compacto (por lo tanto $f(x)\varphi(x) = 0$ fuera de algún compacto), de modo que

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ (f \in C^1(\mathbb{R})) \tag{6}$$

(es permitido escribir $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$) como corchete $\langle f, \varphi' \rangle$ porque $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ cuando $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$). La observación clave ahora es:

el miembro derecho $-\langle f, \varphi' \rangle$ de (6) está bien definido para cualquier $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, diferenciable o no.

Es ahora natural la definición siguiente. Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ definimos su derivada generalizada como la distribución $f'_{gen} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\langle f'_{gen}, \varphi \rangle := -\langle f, \varphi' \rangle, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{7}$$

Veamos que f'_{gen} es una distribución. Para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos

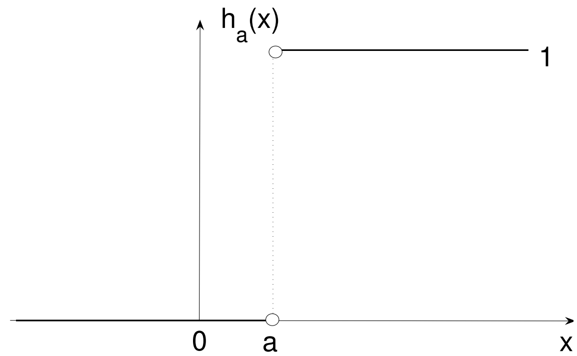
$$\begin{aligned} \langle f'_{gen}, \varphi + \psi \rangle &\overset{(7)}{=} -\langle f, \varphi' + \psi' \rangle \\ &= -\langle f, \varphi' \rangle - \langle f, \psi' \rangle \\ &\overset{(7)}{=} \langle f'_{gen}, \varphi \rangle + \langle f'_{gen}, \psi \rangle, \end{aligned}$$

$$\langle f'_{gen}, \lambda\varphi \rangle \overset{(7)}{=} -\langle f, \lambda\varphi' \rangle = -\lambda\langle f, \varphi' \rangle \overset{(7)}{=} \lambda\langle f'_{gen}, \varphi \rangle,$$

de modo que $f'_{gen} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal, es decir $f'_{gen} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Destacamos: f'_{gen} es una distribución y no una función. Sin embargo, cuando $f \in C^1(\mathbb{R})$ entonces f también posee su derivada clásica $f'_{cl}(x) = f'(x)$ (la cual es una función continua), y según (6), (7) tenemos entonces $f' = f'_{gen}$ como distribuciones. Está afirmación confirma que el concepto de la derivada generalizada (DG) es una generalización apropiada de la derivada clásica (de Newton y Leibniz): cuando ambos existen, entonces coinciden (como distribuciones).

Ejemplo 1. *Sea la función de Heaviside h_a con gráfica*



Es claro que $h_a \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, por lo tanto h_a define la distribución regular

$$\langle h_a, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(x)\varphi(x)dx = \int_{a}^{\infty} \varphi(x)dx, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{8}$$

La derivada clásica $(h_a)'_{cl}(x)$ existe c.s. en $\mathbb{R}$ (excepto en $x = a$) y $(h_a)'_{cl}(x) = 0$ c.s. en $\mathbb{R}$, es decir $(h_a)'_{cl} = 0$. Pero veamos ahora $(h_a)'_{gen}$. Tenemos para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle (h_a)'_{gen}, \varphi \rangle &\overset{(7)}{=} -\langle h_a, \varphi' \rangle \overset{(8)}{=} -\int_{a}^{\infty} \varphi'(x)dx \\ &= -[\varphi(\infty) - \varphi(a)] = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle \end{aligned}$$

($\varphi(\infty) = 0$ porque $sop(\varphi)$ es compacto). Vemos entonces que

$$(h_a)'_{gen} = \delta_a. \tag{9}$$

Tenemos aquí el primer ejemplo donde la DG de una distribución regular es una distribución singular.

Podemos generalizar (7) para definir la derivada distribucional T' de una $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ arbitraria por

$$\langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{10}$$

Es un ejercicio fácil verificar que $T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Podemos entonces proceder a la segunda derivada distribucional:

$$\langle T'', \varphi \rangle = \langle (T')', \varphi \rangle \overset{(10)}{=} -\langle T', \varphi' \rangle \overset{(10)}{=} \langle T, \varphi'' \rangle, \cdots, \text{etc},$$

y más general

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle; \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{11}$$

Por ejemplo, para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$,

$$\langle f^{(n)}_{gen}, \varphi \rangle \overset{(11)}{=} (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)} \rangle = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi^{(n)}(x) dx, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{12}$$

$$\langle \delta^{(n)}_a, \varphi \rangle \overset{(11)}{=} (-1)^n \langle \delta_a, \varphi^{(n)} \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(a), \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{13}$$

Según (11) cualquier $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tiene derivadas distribucionales (DD) de cualquier orden.

3. Observaciones.

Es frecuentemente natural indicar explícitamente la variable x en la escritura de distribuciones, por ejemplo $\delta_a(x)$, $\delta'_a(x)$, $T(x)$ (con $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$), etc. Por ejemplo el producto de la función $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ con δ_a se escribe "mejor" como $x\delta_a(x)$ en lugar de $x\delta_a$, etc. Sin embargo la notación $\delta_a(x)$ sugiere que δ_a es una función y sabemos que no es así, es decir hay que interpretar la notación de la manera correcta.

Una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tiene 2 aspectos. De una parte es una función y de otra parte define una distribución regular T_f (en la notación de la Clase 1). Hemos dicho en la Clase 1 que identificamos (consideramos como la misma función) dos funciones $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $f(x) = g(x)$ *c.s.* en $\mathbb{R}$, y en este caso escribimos $f = g$. Según el Lema de Du Bois - Reymond (Clase 1) tenemos,

$$T_f = T_g \iff f = g \ \text{ (es decir } f(x) = g(x) \ c.s. \text{ en } \mathbb{R}).$$

Esto significa que tenemos una correspondencia $1-1$ (una biyección) entre las funciones localmente integrables y las distribuciones regulares, y con esta correspondencia podemos considerar $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ como un subespacio lineal de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, escribiendo

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

En lo que sigue, cuando decimos que una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ " es una función", entendemos que esto quiere decir que $T = T_f$ para algún $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Existe una regla del producto (regla de Leibniz):

$$(\phi T)' = \phi' T + \phi T;\ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}). \tag{14}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\langle (\phi T)', \varphi \rangle &\overset{(10)}{=} -\langle \phi T, \varphi' \rangle \overset{(4)}{=} -\langle T, \phi \varphi' \rangle \\
&= -\langle T, (\phi\varphi)' - \phi'\varphi \rangle = \langle T, \phi'\varphi \rangle - \langle T, (\phi\varphi)' \rangle \overset{(4)}{=} \langle \phi' T, \varphi \rangle - \langle T, (\phi\varphi)' \rangle \\
&\overset{(10)}{=} \langle \phi' T, \varphi \rangle + \langle T', \phi\varphi \rangle \overset{(4)}{=} \langle \phi' T, \varphi \rangle + \langle \phi T', \varphi \rangle \\
&\overset{(3)}{=} \langle \phi' T + \phi T', \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, lo que demuestra (14).

4. Ejemplos finales de esta clase.

(a) $x\delta(x) =?$. Tenemos para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle x\delta(x), \varphi(x) \rangle \overset{(4)}{=} \langle \delta(x), x\varphi(x) \rangle \overset{(1)}{=} 0\varphi(0) = 0 = \langle 0, \varphi(x) \rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\Longrightarrow x\delta(x) = 0. \tag{15}$$

¡Sorpresa sorpresa!. Además

$$\begin{aligned}
\langle x\delta'(x), \varphi(x) \rangle &\overset{(4)}{=} \langle \delta'(x), x\varphi(x) \rangle \overset{(10)}{=} -\langle \delta(x), (x\varphi(x))' \rangle \\
&= -\langle \delta(x), \varphi(x) + x\varphi'(x) \rangle \overset{(1)}{=} -\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle - 0\varphi'(0) \\
&= -\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle \overset{(3)}{=} \langle -\delta(x), \varphi(x) \rangle,\ \text{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow x\delta'(x) = -\delta(x). \tag{16}$$

¡Caracoles!. Dejamos como ejercicio y disfrute del lector demostrar las reglas

$$x\delta^{(k)}(x) = -k\delta^{(k-1)}(x);\ k = 1, 2, 3\cdots,$$

utilizando (14), (15) e inducción $k \longrightarrow k+1$.

(b)

$$\begin{aligned}
\langle e^{ax}\delta_b'(x), \varphi(x)\rangle &\overset{(4)}{=} \langle \delta_b'(x), e^{ax}\varphi(x)\rangle \overset{(10)}{=} -\langle \delta_b(x), (e^{ax}\varphi(x))'\rangle \\
&= -\langle \delta_b(x), ae^{ax}\varphi(x) + e^{ax}\varphi'(x)\rangle \overset{(1)}{=} -ae^{ab}\varphi(b) - e^{ab}\varphi'(b) \\
&\overset{(13)}{=} -\langle ae^{ab}\delta_b, \varphi\rangle + \langle e^{ab}\delta_b', \varphi\rangle \overset{(3)}{=} \langle -ae^{ab}\delta_b + e^{ab}\delta_b', \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

para <u>todo</u> $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\Longrightarrow e^{ax}\delta_b'(x) = e^{ab}[-a\delta_b(x) + \delta_b'(x)].$$